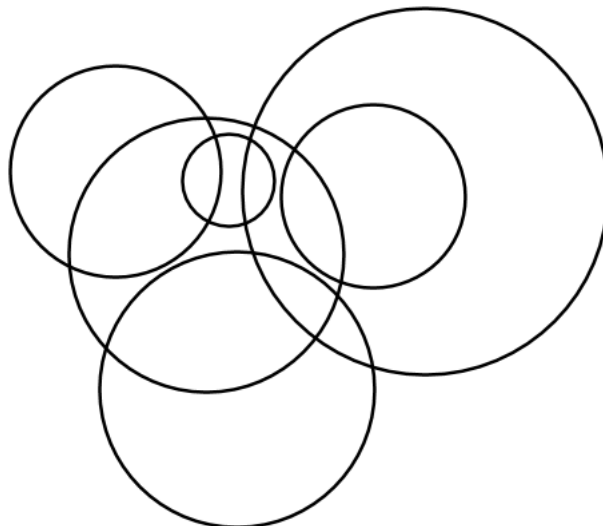


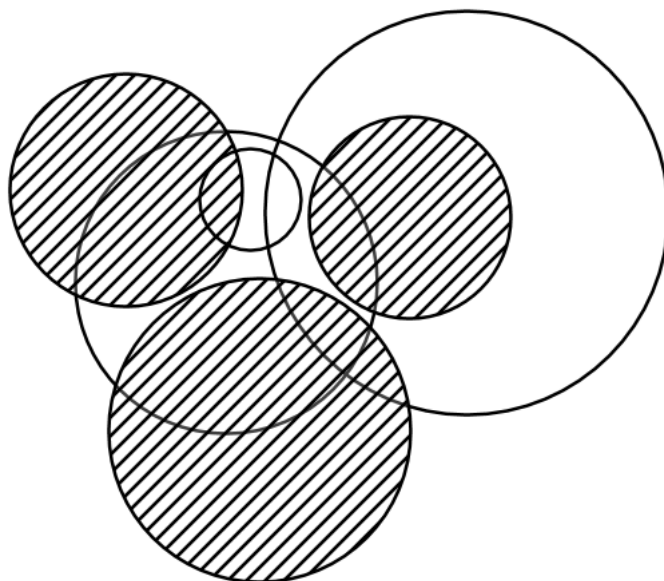
Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 10 класса, 2023–2024 учебный год

1. На пробковой доске Саша хочет разместить 6 бумажных кругов так, чтобы они располагались как на схеме ниже.

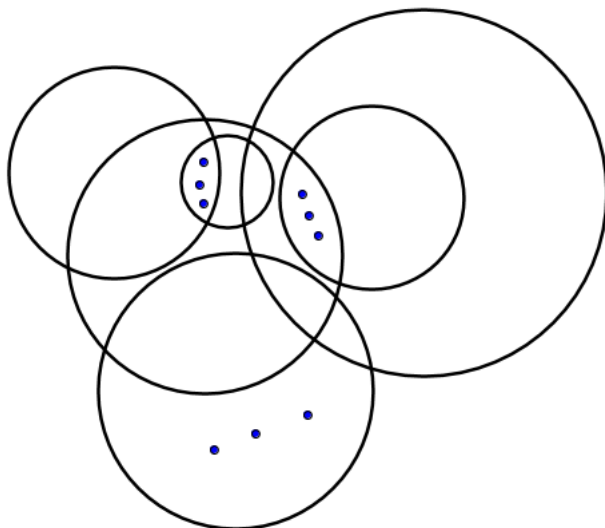


Саша хочет прикрепить круги к доске с помощью канцелярских кнопок, причём он хочет, чтобы каждый круг был прикреплён хотя бы тремя кнопками. Какое наименьшее количество кнопок ему для этого понадобится?

Ответ. 9. Решение. Заметим, что внутри каждого из трёх заштрихованных кругов должны быть свои собственные три кнопки. Поэтому меньше, чем 9 кнопками не обойтись.



С другой стороны, легко привести пример, когда 9 кнопок достаточно:



2. На доске написано число 6. За одну операцию разрешается число n заменить либо на число $n - 4$, либо на число n^2 . Какие из следующих чисел можно получить через несколько операций?

а) -2002 ; б) 41; в) 2002; г) 500; д) -32 .

Ответ. а), д), е). **Решение.** (а) Можно получить используя только операцию вычитания, так как оба числа дают остаток 2 при делении на 4.

(б) Нет, так как первоначальное число чётно и остаётся таковым после описанных операций.

(в) Нет. Надо использовать возведение в квадрат хотя бы один раз. После этого полученное число и все следующие числа будут делиться на 4.

(г) Возведём два раза в квадрат. Так как $6^4 > 500$ и оба числа делятся на 4, то дальше достаточно только вычитать 4.

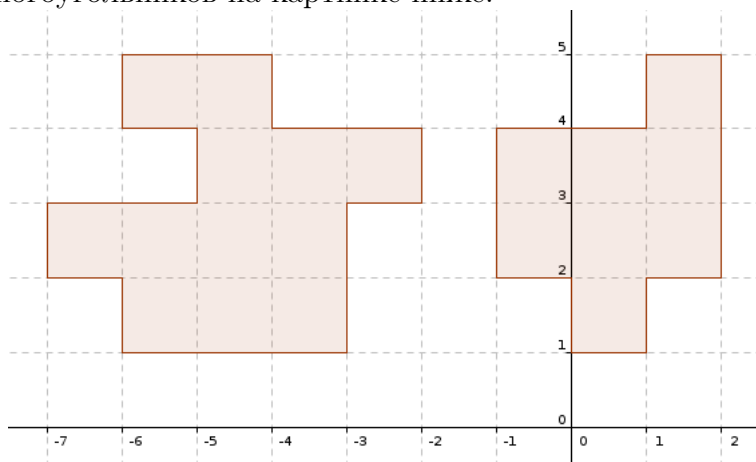
(е) Возведём в квадрат. Так как $6^2 > -32$ и оба числа делятся на 4, то дальше достаточно только вычитать 4.

3. Семь школьников, среди которых Аня, Боря, Юля и Ян, играли в пинг-понг. Каждый школьник сыграл с каждым другим ровно один раз. Аня и Боря выиграли по пять раз каждый. Какое наибольшее количество побед суммарно могли одержать Юля и Ян?

Ответ. 8. **Решение.** Заметим, что Аня и Боря суммарно выиграли 10 партий. Из них 1 — между собой и не более 6 — у игроков, имена которых не упомянуты. Поэтому у Юли и Яна они выиграли хотя бы 3 партии. Значит, Юля и Ян у Ани и Бори суммарно выиграли не более одной партии. Кроме того, 1 партии они проиграли между собой (и в ней кто-то выиграл), и не более 6 партий — у игроков, имена которых не упомянуты. Итого, Юля и Ян выиграли не более $1 + 1 + 6 = 8$ партий.

Пример такой ситуации легко строится из рассуждений выше.

4. Назовём многоугольник, нарисованный на координатной плоскости, *клетчатым*, если каждая его сторона которого лежит на прямой вида $x = k$ для некоторого целого k или $y = k$ для некоторого целого k . Примеры клетчатых многоугольников на картинке ниже:

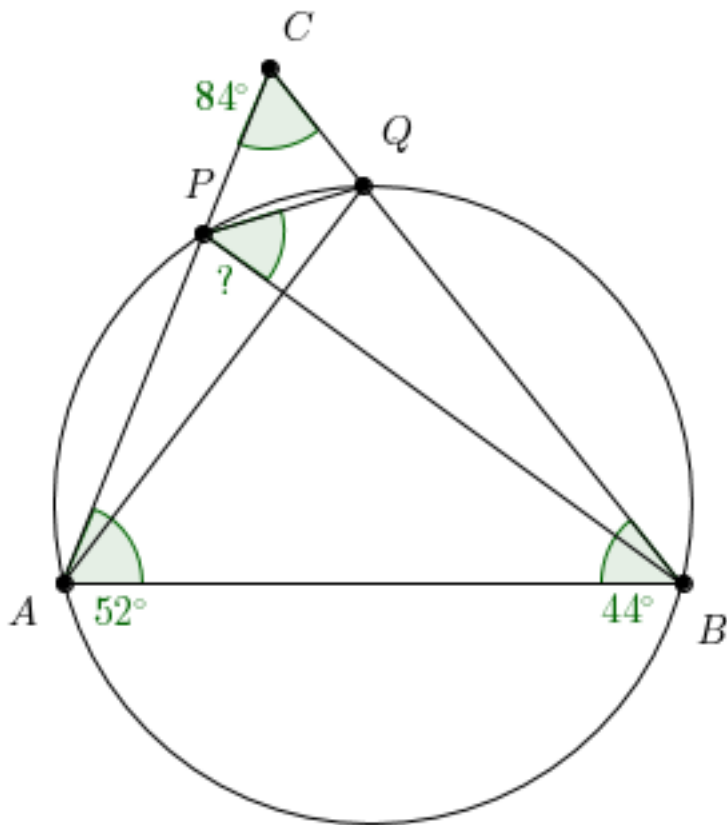


Окружность $x^2 + y^2 = 103$ оказалась целиком внутри клетчатого многоугольника \mathcal{P} . Какое наименьшее значение может принимать периметр многоугольника \mathcal{P} ?

Ответ. 88. **Решение.** Окружность $x^2 + y^2 = 103$ — это окружность с центром в начале координат, радиус которой чуть больше 10. Значит, у \mathcal{P} должны быть хотя бы по две горизонтальные стороны между прямыми $x = -11$ и $x = -10$, $x = -10$ и $x = -9, \dots, x = 10, x = 11$. Аналогично для вертикальных сторон. Итого, периметр хотя бы 88.

Пример доставляет квадрат, образованный прямыми $x = -11, x = 11, y = -11, y = 11$.

5. В треугольнике ABC известны величины углов: $\angle A = 52^\circ$, $\angle B = 44^\circ$, $\angle C = 84^\circ$. Окружность, проходящая через точки A и B повторно пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что сумма $AQ + BP$ принимает наименьшее возможное значение. Чему равен угол $\angle BPQ$? Ответ дайте в градусах.



Ответ. 46. **Решение.** Заметим, что длина AQ не меньше длине высоты из вершины A , а длина BP — длине высоты из вершины B . С другой стороны, если P и Q — основания высот, то точки A, B, P, Q лежат на одной окружности. Значит, P и Q и есть основания высот. Тогда

$$\angle BPQ = \angle BAQ = 90^\circ - \angle ABC = 46^\circ,$$

где первое равенство следует из вписанности четырёхугольника $APQB$.

6. На доске записаны несколько попарно различных натуральных чисел. Рома вычислил произведение двух наименьших чисел и получил 49. Затем он вычислил произведение двух самых больших чисел и получил 2652. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 153 или 203. **Решение.** Число 49 раскладывается в произведение двух различных множителей только как $1 \cdot 49$. Число 2652 можно представить как $51 \cdot 52$. В любом другом разложении будет множитель меньший 49, поэтому это единственное подходящее разложение. Тогда есть два варианта суммы $1 + 49 + 51 + 52 = 153$ или $1 + 49 + 50 + 51 + 52 = 203$.

7. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x) \leq Q(x)$ тогда и только тогда, когда $6 \leq x \leq 9$. Известно, что $P(0) - Q(0) = 243$. Чему равно $P(1) - Q(1)$?

Ответ. 180. **Решение.** По условию, $P(x) - Q(x) \leq 0$ тогда и только тогда, когда $6 \leq x \leq 9$. Поскольку $P(x) - Q(x)$ — или линейная функция, или квадратный трёхчлен, то метод интервалов говорит нам, что $P(x) - Q(x) = k(x - 6)(x - 9)$. По условию

$$243 = P(0) - Q(0) = 54k,$$

откуда $k = 9/2$. Тогда $P(1) - Q(1) = 9/2 \cdot 5 \cdot 8 = 180$.

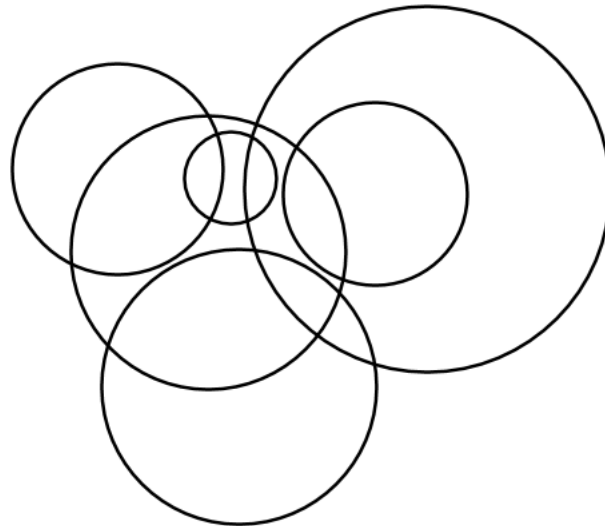
8. Яна придумала пятизначное число, и Тимофей хочет его угадать. За один вопрос Тимофей может назвать пятизначное число, и Яна скажет, сколько в нём верных цифр, т.е. цифр, которые тоже присутствуют в числе Яны, причём на том же самом месте, что и в числе Тимофея. Яна сказала, что в предложенном Тимофеем числе 20489 верны две цифры, а в числе 15673 — три. Тимофей выписал все пятизначные числа, подходящие под ответы Яны. Чему равна сумма чисел, выписанных Тимофеем?

Ответ. 175 994. **Решение.** Давайте каждое подходящее число \overline{abcde} представим как $a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + \dots + e \cdot 1$. Сколько раз после этого в сумме встречается $2 \cdot 10^4$, т.е. в скольких подходящих числах на первом месте стоит цифра 2? Если мы уже выбрали цифру 2, то из числа 20 489 осталось выбрать одну цифру, а все оставшиеся — из 15 673. Это можно сделать четырьмя способами, т.е. $2 \cdot 10^4$ встречается в сумме 4 раза. Аналогично, для каждого из слагаемых $0 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^2, 8 \cdot 10, 9 \cdot 1$. В общую сумму они тогда вносят $4 \cdot 20\,489$.

Сколько раз в сумме встречается $1 \cdot 10^4$? Если мы выбрали первую цифру из второго числа, то из первого у нас есть $C_4^2 = 6$ вариантов выбрать правильные цифры. Аналогично предыдущему абзацу, все совпадения с цифрами числа 15673 вносят в сумму $6 \cdot 15\,673$. Итого, ответ $4 \cdot 20\,489 + 6 \cdot 15\,673 = 175\,994$.

Информация о вариантах

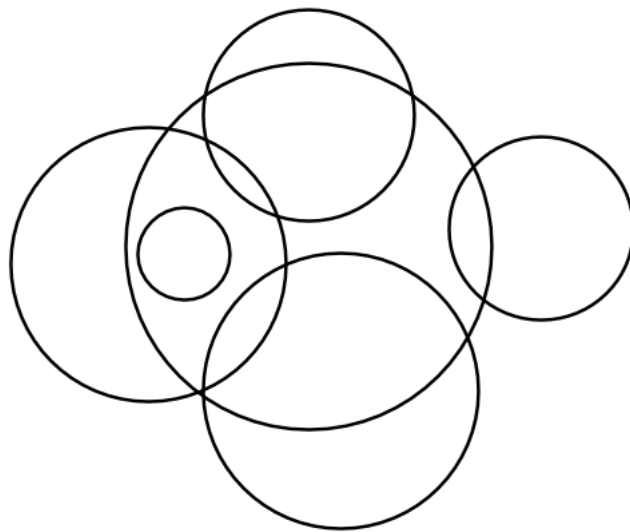
1-1. На пробковой доске Саша хочет разместить 6 бумажных кругов так, чтобы они располагались как на схеме ниже.



Саша хочет прикрепить круги к доске с помощью канцелярских кнопок, причём он хочет, чтобы каждый круг был прикреплён хотя бы тремя кнопками. Какое наименьшее количество кнопок ему для этого понадобится?

Ответ. 9.

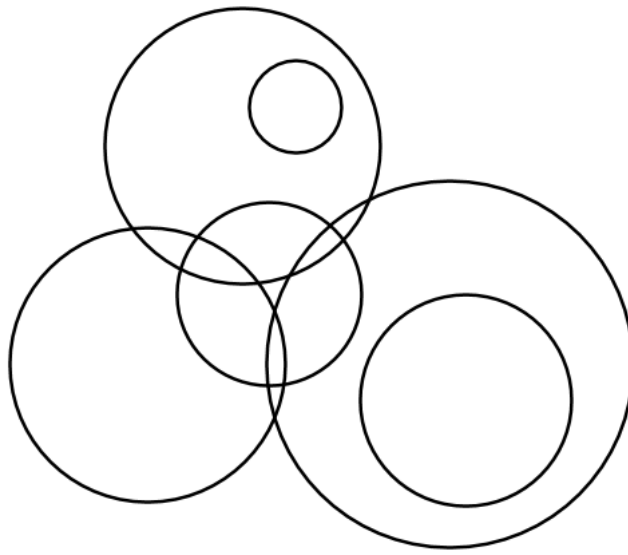
1-2. На пробковой доске Саша хочет разместить 6 бумажных кругов так, чтобы они располагались как на схеме ниже.



Саша хочет прикрепить круги к доске с помощью канцелярских кнопок, причём он хочет, чтобы каждый круг был прикреплён хотя бы тремя кнопками. Какое наименьшее количество кнопок ему для этого понадобится?

Ответ. 12.

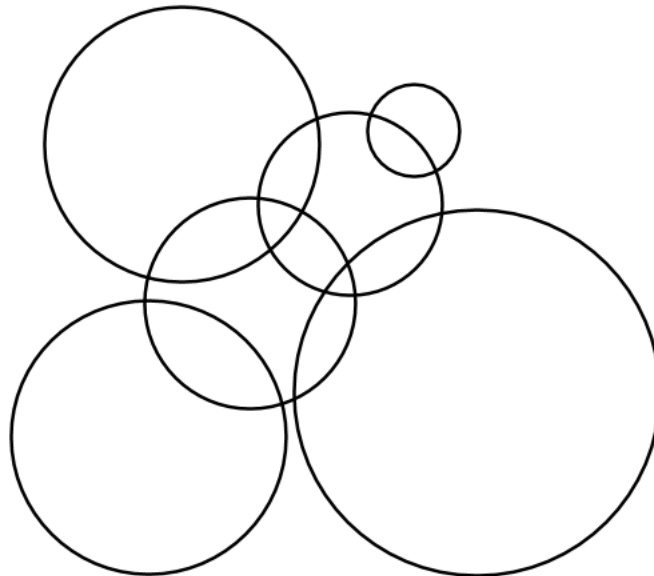
1-3. На пробковой доске Саша хочет разместить 6 бумажных кругов так, чтобы они располагались как на схеме ниже.



Саша хочет прикрепить круги к доске с помощью канцелярских кнопок, причём он хочет, чтобы каждый круг был прикреплён хотя бы двумя кнопками. Какое наименьшее количество кнопок ему для этого понадобится?

Ответ. 6.

1-4. На пробковой доске Саша хочет разместить 6 бумажных кругов так, чтобы они располагались как на схеме ниже.



Саша хочет прикрепить круги к доске с помощью канцелярских кнопок, причём он хочет, чтобы каждый круг был прикреплён хотя бы двумя кнопками. Какое наименьшее количество кнопок ему для этого понадобится?

Ответ. 8.

2-1. На доске написано число 6. За одну операцию разрешается число n заменить либо на число $n - 4$, либо на число n^2 . Какие из следующих чисел можно получить через несколько операций?

а) -2002 ; б) 41; в) 2002; г) 500; е) -32 .

Ответ. а), д), е).

2-2. На доске написано число 6. За одну операцию разрешается число n заменить либо на число $n - 9$, либо на число n^2 . Какие из следующих чисел можно получить через несколько операций?

а) -894 ; б) 100; в) 1029; г) 2025; е) -36 .

Ответ. а), д), е).

2-3. На доске написано число 10. За одну операцию разрешается число n заменить либо на число $n - 8$, либо на число n^3 . Какие из следующих чисел можно получить через несколько операций?

а) -198 ; б) 59; в) 1110; г) 168; е) -24 .

Ответ. а), д), е).

2-4. На доске написано число 10. За одну операцию разрешается число n заменить либо на число $n - 25$, либо на число n^2 . Какие из следующих чисел можно получить через несколько операций?

а) -215 ; б) 103 ; в) 1215 ; д) 0 ; е) -75 .

Ответ. а), д), е).

3-1. Семь школьников, среди которых Аня, Боря, Юля и Ян, играли в пинг-понг. Каждый школьник сыграл с каждым другим ровно один раз. Аня и Боря выиграли по пять раз каждый. Какое наибольшее количество побед суммарно могли одержать Юля и Ян?

Ответ. 8.

3-2. Семь школьников, среди которых Аня, Боря, Юля и Ян, играли в пинг-понг. Каждый школьник сыграл с каждым другим ровно один раз. Аня и Боря выиграли по четыре раза каждый. Какое наибольшее количество побед суммарно могли одержать Юля и Ян?

Ответ. 10.

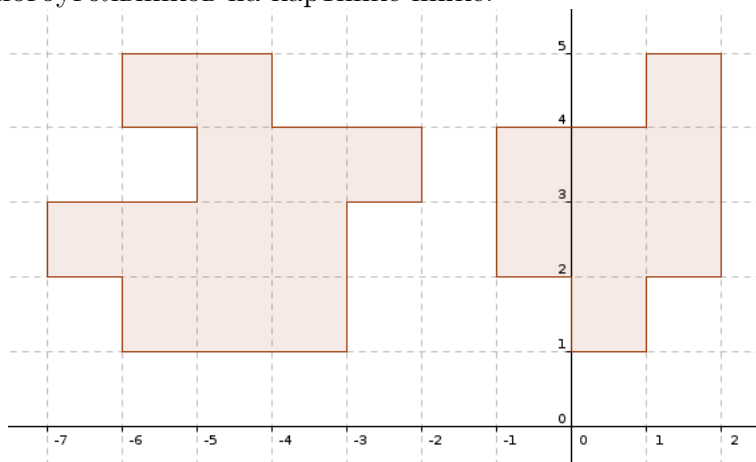
3-3. Восемь школьников, среди которых Аня, Боря, Юля и Ян, играли в пинг-понг. Каждый школьник сыграл с каждым другим ровно один раз. Аня и Боря выиграли по пять раз каждый. Какое наибольшее количество побед суммарно могли одержать Юля и Ян?

Ответ. 12.

3-4. Десять школьников, среди которых Аня, Боря, Юля и Ян, играли в пинг-понг. Каждый школьник сыграл с каждым другим ровно один раз. Аня и Боря выиграли по восемь раз каждый. Какое наибольшее количество побед суммарно могли одержать Юля и Ян?

Ответ. 14.

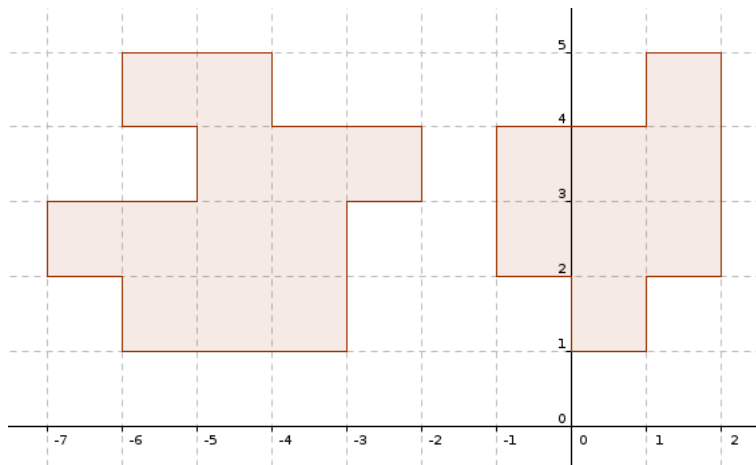
4-1. Назовём многоугольник, нарисованный на координатной плоскости, *клетчатым*, если каждая его сторона которого лежит на прямой вида $x = k$ для некоторого целого k или $y = k$ для некоторого целого k . Примеры клетчатых многоугольников на картинке ниже:



Окружность $x^2 + y^2 = 103$ оказалась целиком внутри клетчатого многоугольника \mathcal{P} . Какое наименьшее значение может принимать периметр многоугольника \mathcal{P} ?

Ответ. 88.

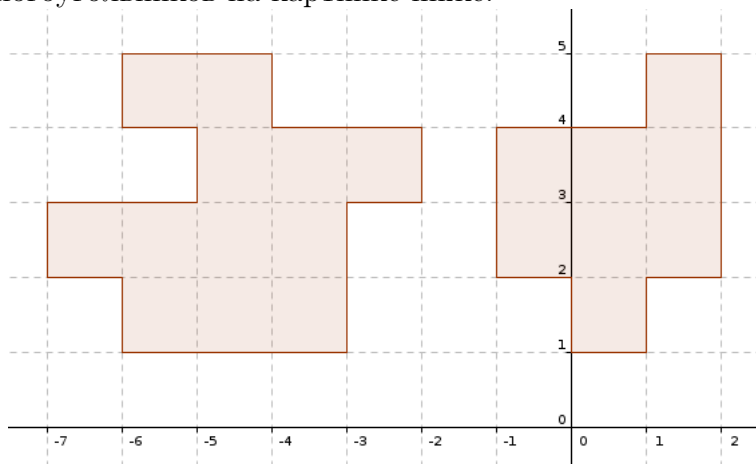
4-2. Назовём многоугольник, нарисованный на координатной плоскости, *клетчатым*, если каждая его сторона которого лежит на прямой вида $x = k$ для некоторого целого k или $y = k$ для некоторого целого k . Примеры клетчатых многоугольников на картинке ниже:



Окружность $x^2 + y^2 = 67$ оказалась целиком внутри клетчатого многоугольника \mathcal{P} . Какое наименьшее значение может принимать периметр многоугольника \mathcal{P} ?

Ответ. 72.

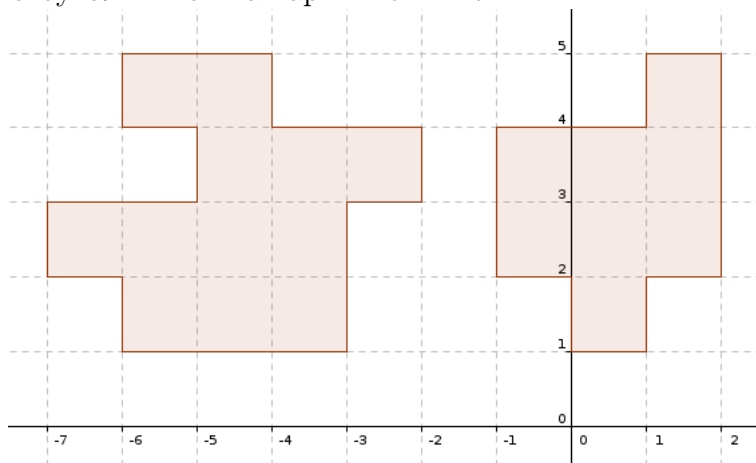
4-3. Назовём многоугольник, нарисованный на координатной плоскости, *клетчатым*, если каждая его сторона которого лежит на прямой вида $x = k$ для некоторого целого k или $y = k$ для некоторого целого k . Примеры клетчатых многоугольников на картинке ниже:



Окружность $x^2 + y^2 = 147$ оказалась целиком внутри клетчатого многоугольника \mathcal{P} . Какое наименьшее значение может принимать периметр многоугольника \mathcal{P} ?

Ответ. 104.

4-4. Назовём многоугольник, нарисованный на координатной плоскости, *клетчатым*, если каждая его сторона которого лежит на прямой вида $x = k$ для некоторого целого k или $y = k$ для некоторого целого k . Примеры клетчатых многоугольников на картинке ниже:

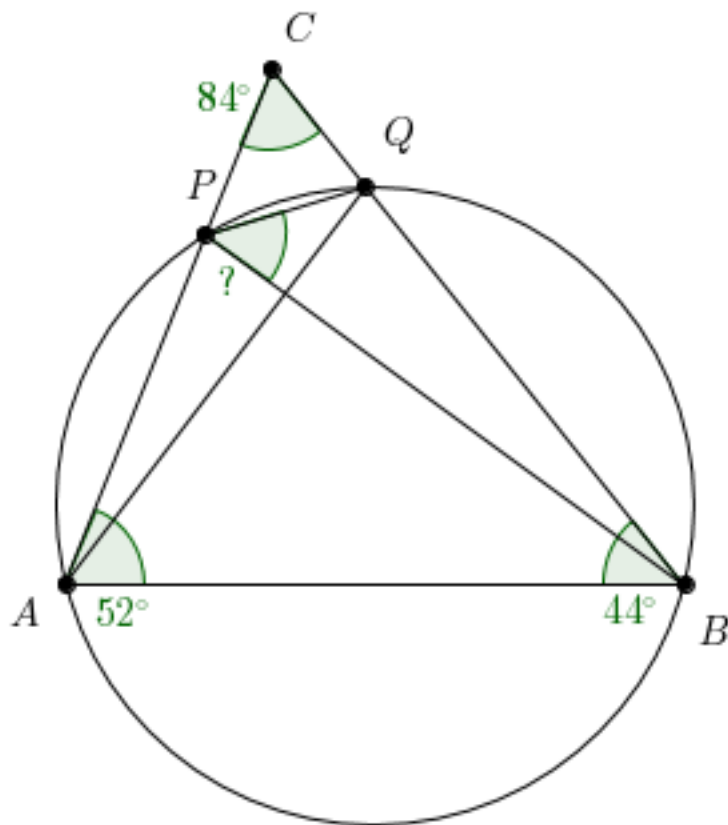


Окружность $x^2 + y^2 = 39$ оказалась целиком внутри клетчатого многоугольника \mathcal{P} . Какое наименьшее значение может принимать периметр многоугольника \mathcal{P} ?

Ответ. 56.

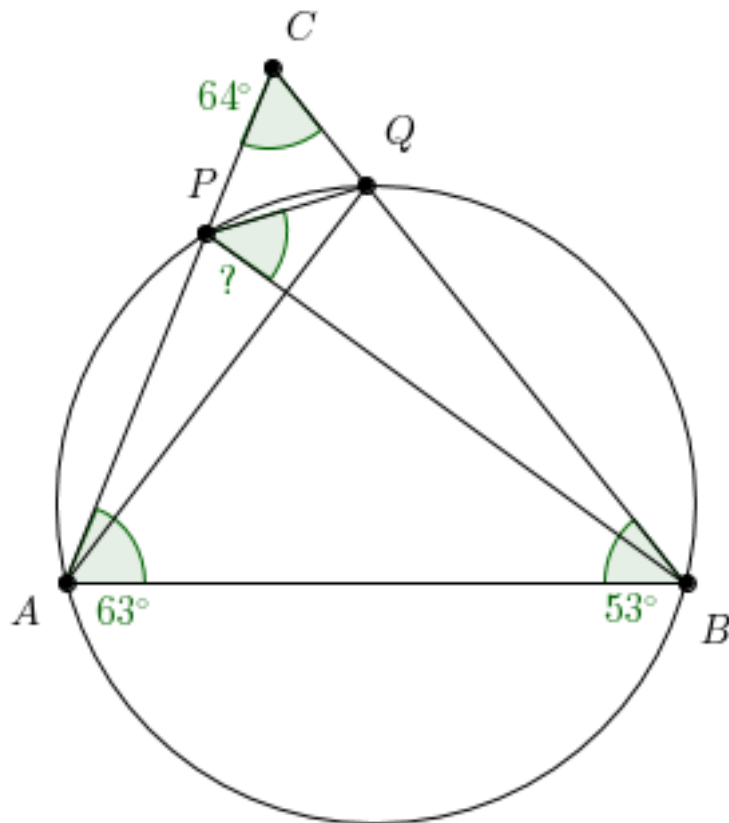
5-1. В треугольнике ABC известны величины углов: $\angle A = 52^\circ$, $\angle B = 44^\circ$, $\angle C = 84^\circ$. Окружность, проходящая через точки A и B повторно пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q соответственно.

Оказалось, что сумма $AQ + BP$ принимает наименьшее возможное значение. Чему равен угол $\angle BPQ$?
 Ответ дайте в градусах.



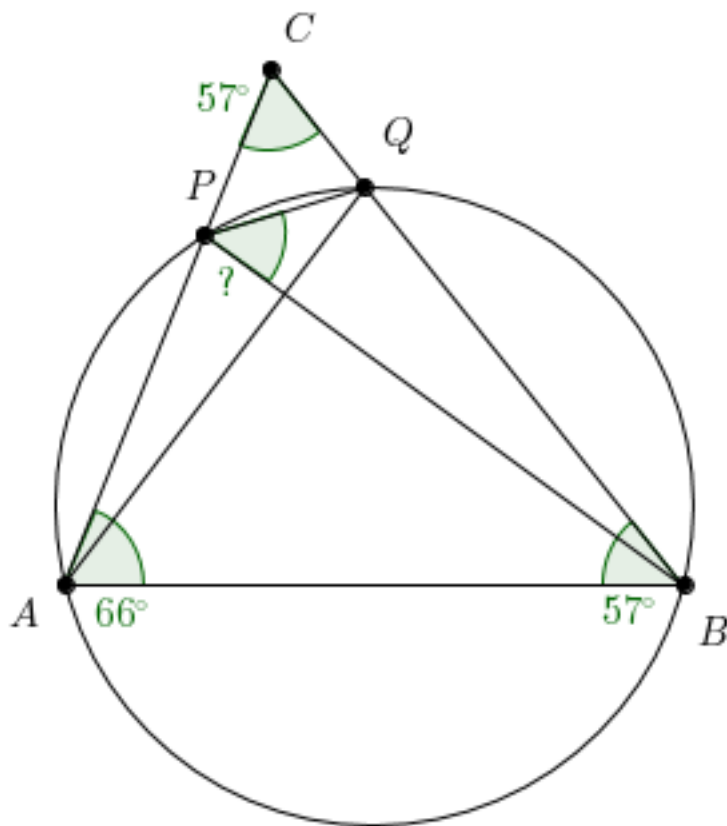
Ответ. 46.

5-2. В треугольнике ABC известны величины углов: $\angle A = 63^\circ$, $\angle B = 53^\circ$, $\angle C = 64^\circ$. Окружность, проходящая через точки A и B повторно пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что сумма $AQ + BP$ принимает наименьшее возможное значение. Чему равен угол $\angle BPQ$?
 Ответ дайте в градусах.



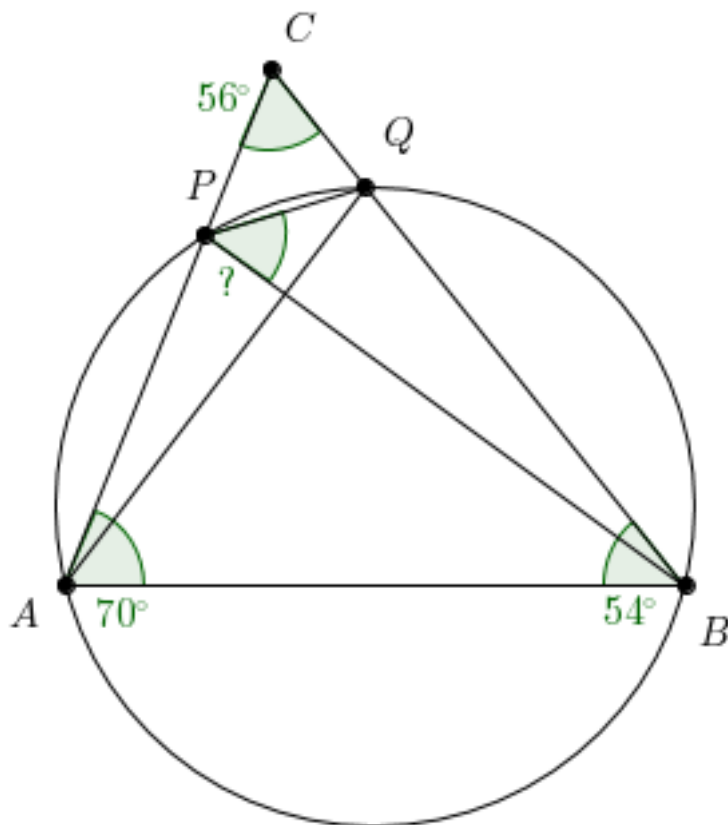
Ответ. 37.

5-3. В треугольнике ABC известны величины углов: $\angle A = 66^\circ$, $\angle B = 57^\circ$, $\angle C = 57^\circ$. Окружность, проходящая через точки A и B повторно пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что сумма $AQ + BP$ принимает наименьшее возможное значение. Чему равен угол $\angle BPQ$? Ответ дайте в градусах.



Ответ. 33.

5-4. В треугольнике ABC известны величины углов: $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 54^\circ$, $\angle C = 56^\circ$. Окружность, проходящая через точки A и B повторно пересекает отрезки AC и BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что сумма $AQ + BP$ принимает наименьшее возможное значение. Чему равен угол $\angle BPQ$? Ответ дайте в градусах.



Ответ. 36.

6-1. На доске записаны несколько попарно различных натуральных чисел. Рома вычислил произведение двух наименьших чисел и получил 49. Затем он вычислил произведение двух самых больших чисел и получил 2652. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 153 или 203.

6-2. На доске записаны несколько попарно различных натуральных чисел. Рома вычислил произведение двух наименьших чисел и получил 25. Затем он вычислил произведение двух самых больших чисел и получил 756. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 81 или 107.

6-3. На доске записаны несколько попарно различных натуральных чисел. Рома вычислил произведение двух наименьших чисел и получил 49. Затем он вычислил произведение двух самых больших чисел и получил 2703. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 154 или 204.

6-4. На доске записаны несколько попарно различных натуральных чисел. Рома вычислил произведение двух наименьших чисел и получил 25. Затем он вычислил произведение двух самых больших чисел и получил 783. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске? Укажите все возможные ответы.

Ответ. 82 или 108.

7-1. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x) \leq Q(x)$ тогда и только тогда, когда $6 \leq x \leq 9$. Известно, что $P(0) - Q(0) = 243$. Чему равно $P(1) - Q(1)$?

Ответ. 180.

7-2. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x) \leq Q(x)$ тогда и только тогда, когда $4 \leq x \leq 9$. Известно, что $P(0) - Q(0) = 126r$. Чему равно $P(1) - Q(1)$?

Ответ. 84.

7-3. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x) \leq Q(x)$ тогда и только тогда, когда $3 \leq x \leq 8$. Известно, что $P(0) - Q(0) = 60$. Чему равно $P(1) - Q(1)$?

Ответ. 35.

7-4. Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x) \leq Q(x)$ тогда и только тогда, когда $5 \leq x \leq 8$. Известно, что $P(0) - Q(0) = 100$. Чему равно $P(1) - Q(1)$?

Ответ. 70.

8-1. Яна придумала пятизначное число, и Тимофей хочет его угадать. За один вопрос Тимофей может назвать пятизначное число, и Яна скажет, сколько в нём верных цифр, т.е. цифр, которые тоже присутствуют в числе Яны, причём на том же самом месте, что и в числе Тимофея. Яна сказала, что в предложенном Тимофеем числе 20489 верны две цифры, а в числе 15673 — три. Тимофей выписал все пятизначные числа, подходящие под ответы Яны. Чему равна сумма чисел, выписанных Тимофеем?

Ответ. 175994.

8-2. Яна придумала пятизначное число, и Тимофей хочет его угадать. За один вопрос Тимофей может назвать пятизначное число, и Яна скажет, сколько в нём верных цифр, т.е. цифр, которые тоже присутствуют в числе Яны, причём на том же самом месте, что и в числе Тимофея. Яна сказала, что в предложенном Тимофеем числе 64179 верны две цифры, а в числе 58230 — три. Тимофей выписал все пятизначные числа, подходящие под ответы Яны. Чему равна сумма чисел, выписанных Тимофеем?

Ответ. 606096.

8-3. Яна придумала пятизначное число, и Тимофей хочет его угадать. За один вопрос Тимофей может назвать пятизначное число, и Яна скажет, сколько в нём верных цифр, т.е. цифр, которые тоже присутствуют в числе Яны, причём на том же самом месте, что и в числе Тимофея. Яна сказала, что в предложенном Тимофеем числе 71590 верны две цифры, а в числе 64832 — три. Тимофей выписал все пятизначные числа, подходящие под ответы Яны. Чему равна сумма чисел, выписанных Тимофеем?

Ответ. 675352.

8-4. Яна придумала пятизначное число, и Тимофей хочет его угадать. За один вопрос Тимофей может назвать пятизначное число, и Яна скажет, сколько в нём верных цифр, т.е. цифр, которые тоже присутствуют в числе Яны, причём на том же самом месте, что и в числе Тимофея. Яна сказала, что в предложенном Тимофеем числе 87409 верны две цифры, а в числе 63125 — три. Тимофей выписал все пятизначные числа, подходящие под ответы Яны. Чему равна сумма чисел, выписанных Тимофеем?

Ответ. 728386.